

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e Aplicações

por

Gustavo da Silva Araújo

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e Aplicações

por

Gustavo da Silva Araújo

sob orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Monografia apresentada ao corpo docente do Departamento de Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

João Pessoa - PB
Dezembro/2010

Catálogo na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

A658t Araújo , Gustavo da Silva

O teorema da função implícita em espaços de Banach e aplicações /
Gustavo da Silva Araújo. - João Pessoa, 2011.
45f.: il.

Monografia (Graduação) -CCEN/UFPB.
Orientador: Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

1. Espaços de Banach. 2. Derivada de Fréchet 3. Teorema da
função implícita. I. Título

BS/CCEN

CDU : 51 (043.2)

O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e Aplicações

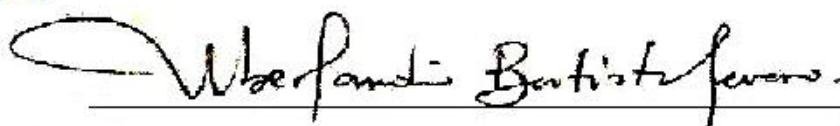
por

Gustavo da Silva Araújo

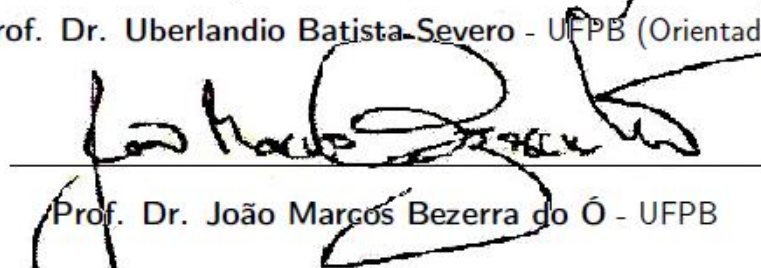
Monografia apresentada ao corpo docente do Departamento de Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Área de concentração: Análise.

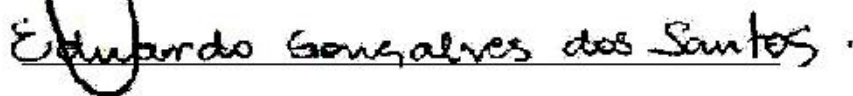
Aprovada por:



Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB



Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Dezembro/2010

Agradecimentos

- Agradeço de forma especial ao amigo e professor Uberlandio Severo, pela dedicação total, extrema competência e pelas valorosas contribuições a minha formação enquanto matemático.
- Aos meus pais Maurício Ferreira de Araújo e Elisa Clara Marques da Silva e aos meus irmãos Leonardo, Guilherme e Mauricio Filho pela total crença no meu sucesso, por nunca terem me abandonado nos momentos de dificuldade e por me fazerem ter orgulho de onde vim, por terem me ensinado os valores que carrego até hoje e que, se Deus permitir, hei de carregar durante toda a vida.
- Aos amigos Anselmo, Artur, Daniel Peixoto, Igor (Carioca), Osman, Rodolfo e Wellington por estarem comigo desde os meus primeiros dias em João Pessoa e tornarem essa caminhada tão menos cansativa e por me ensinarem o real valor de uma amizade verdadeira.
- Agradeço ainda aos amigos e companheiros de graduação, especialmente a José Carlos Jr., que colocou o desejo de aprender e ensinar acima de qualquer possível competição medíocre de conhecimento e por ter compreendido que temos os mesmos objetivos e que unidos somos mais fortes no que diz respeito a perseguí-los.
- Aos professores de graduação do DM - CCEN - UFPB que incentivaram-me e participaram do meu desenvolvimento enquanto matemático. Especialmente, ao professor Everaldo Souto de Medeiros, que sempre apoiou e incentivou meus estudos.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos e faremos um apanhado histórico sobre o Teorema da Função Implícita. Nosso principal objetivo será apresentar a generalização desse teorema para espaços de Banach e provar detalhadamente tal extensão. Além disso, mostraremos alguns resultados de extrema utilidade que serão demonstrados como aplicações do teorema em questão.

Palavras-chave: Espaços de Banach, Derivada de Fréchet, Teorema da Função Implícita.

Abstract

In this work, we will study and make a historical overview about the Implicit Function Theorem. Our main objective will be to present the generalization of this theorem for Banach spaces and prove in detail that extension. Furthermore, we will show some results of extreme usefulness that will be demonstrated as applications of the theorem in question.

Keywords: Banach Spaces, Fréchet Derivative, Implicit Function Theorem.

Sumário

Introdução	vii
1 Conceitos preliminares	1
1.1 Espaços de Banach	1
1.2 Aplicações Lineares Limitadas	4
1.3 As Derivadas de Fréchet e de Gâteaux	8
2 O Teorema da Função Implícita	21
2.1 O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach	22
3 Aplicações do Teorema da Função Implícita	29
3.1 Uma Aplicação em Sistemas Não-Lineares	29
3.2 O Teorema da Função Inversa	31
3.3 Equações Diferenciais Ordinárias	32
Referências Bibliográficas	36

Introdução

Anos depois de Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) aproximar-se com rigor matemático do Teorema da Função Implícita para funções de duas variáveis reais, Ulisse Dini (1845-1918) generalizou essa versão para o contexto de funções de qualquer número de variáveis reais. As técnicas modernas e os novos conceitos matemáticos têm permitido um grande número de generalizações do Teorema da Função Implícita.

Uma dessas generalizações é o principal objetivo desse trabalho: iremos analisar, via Teorema da Função Implícita, a existência de soluções da equação

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

onde $f : E \times F \rightarrow G$ é uma função contínua, E, F e G são espaços vetoriais normados e, além disso, F é um espaço de Banach. Veremos que, na maioria das vezes, não é possível falar de uma estrutura global do conjunto de soluções para (1). No entanto, dada uma solução, digamos, (a, b) , da equação (1), sob algumas condições razoáveis, podemos descrever localmente o conjunto de soluções de (1). Na verdade, mostraremos que as soluções "próximas" a (a, b) se encontram em uma curva.

Iremos apresentar algumas versões mais compreensíveis (em espaços com "melhores" propriedades) para que o leitor se familiarize e, principalmente, entenda melhor o teorema em questão. Finalmente, faremos o que é o principal objetivo deste capítulo: apresentar e demonstrar detalhadamente o Teorema da Função Implícita em espaços de Banach.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Capítulo 1: Nesta parte do trabalho, desejando generalizar o Teorema da Função Implícita para espaços de Banach, foi preciso, primeiramente, nos familiarizarmos com a noção de transformações lineares limitadas para que, então, desenvolvêssemos um estudo a respeito do cálculo diferencial em espaços vetoriais normados.

Capítulo 2: Aqui, além de fazermos um apanhado histórico sobre o Teorema da

Função Implícita, fizemos o que é o principal objetivo desse trabalho: generalizar tal teorema para espaços de Banach e demonstrá-lo da forma mais detalhada possível. Além disso, provamos também o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que teve papel significativo no entendimento da demonstração do teorema generalizado.

No **Capítulo 3**, nos dedicamos a apresentar algumas aplicações do teorema em questão. Podemos destacar entre essas aplicações o Teorema da Função Inversa e um Teorema de Existência de Dependência Contínua da Solução do Problema da Cauchy.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

O conceito central do cálculo diferencial é o de função diferenciável. De maneira intuitiva, este conceito afirma que se uma função é diferenciável, então ela pode ser aproximada localmente por uma função linear.

Neste capítulo, implantaremos todos os resultados e definições necessários para podermos apresentar o Teorema da Função Implícita em espaços de Banach. Daremos a noção de derivada de Fréchet, a qual generaliza a noção de derivada de funções de uma variável real e introduziremos o cálculo diferencial em espaços vetoriais normados.

1.1 Espaços de Banach

Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

M1. $d(x, y) \geq 0$, para todos $x, y \in M$ e $d(x, y) = 0$ implica $x = y$;

M2. $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in M$;

N3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in M$.

Definição 1.1.1 *Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto e d é uma métrica em M .*

Para desenvolver e estudar o conceito de diferenciabilidade em contextos mais gerais, é necessário tanto uma noção de linearidade (a noção de espaço vetorial) quanto uma

noção de medida de comprimento de vetores (uma noção de norma). Estas duas idéias juntas nos conduzem ao estudo do chamado *espaço vetorial normado*.

Definição 1.1.2 *Uma norma em um espaço vetorial real E é uma função*

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

N1. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ implica $x = 0$;

N2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $x \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

N3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, para todo $x_1, x_2 \in E$.

Definição 1.1.3 *Um espaço vetorial real normado é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em E .*

Proposição 1.1.1 *Todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ torna-se um espaço métrico por meio da seguinte métrica:*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in E \quad (1.1)$$

Observação 1.1.1 (i) *É fácil verificar que a aplicação d definida em (1.1) satisfaz os axiomas (M1), (M2) e (M3), logo d é uma métrica.*

(ii) *Chamaremos a métrica definida em (1.1) por métrica associada à norma $\|\cdot\|$.*

Note que, num espaço vetorial normado, se tem $\|x\| = d(x, 0)$, ou seja, a norma de um vetor x é a distância de x a origem.

Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "espaço vetorial normado E ", deixando subentendida qual a norma $\|\cdot\|$ que está sendo considerada.

Exemplo 1.1.1 *Os pares $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, onde, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

são espaços vetoriais normados.

Exemplo 1.1.2 *Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X; \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é limitada}\}$, onde consideramos a norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.*

Definição 1.1.4 *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M é chamada sequência de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para quaisquer $m, n \geq n_0$.*

Observe que sequências de Cauchy em um espaço métrico M são invariantes por translações, isto é, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e $a \in M$ é um elemento arbitrário, então a sequência $(x_n + a)_{n \in \mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy. Isto mostra que sequências de Cauchy não podem ser definidas usando o conceito de vizinhança. Outro fato muito importante a respeito das sequências de Cauchy é que podemos determinar a convergência de uma sequência sem determinar o limite para o qual essa sequência converge. A seguir enunciamos sem demonstrar (o leitor interessado pode consultar [3]) outros resultados importantes sobre esse tipo de sequência.

Proposição 1.1.2 *(i) Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

(ii) Toda sequência de Cauchy é limitada.

(iii) Se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então a sequência original é convergente.

A recíproca do item (i) da proposição acima em geral não é verdadeira. Mais especificamente, podem existir espaços métricos nos quais nem toda sequência de Cauchy é convergente. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.3 *Defina em \mathbb{Q} a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por*

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente temos que $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, também é fácil verificar que esta sequência converge para $\sqrt{2}$ em \mathbb{R} . Assim, pela Proposição 1.1.2, temos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} e, portanto, também é uma sequência de Cauchy em \mathbb{Q} .

Por outro lado, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não pode convergir em \mathbb{Q} . De fato, se $x_n \rightarrow a$ para algum $a \in \mathbb{Q}$, então $x_n \rightarrow a$ em \mathbb{R} também. Pela unicidade do limite, obtemos, finalmente, que $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o que é uma contradição.

Esse exemplo motiva a definição de espaços de Banach que apresentaremos a seguir.

Definição 1.1.5 *Um espaço métrico M é chamado de espaço métrico completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente. Um espaço vetorial normado completo é chamado espaço de Banach.*

Exemplo 1.1.4 (i) *A reta real \mathbb{R} é um espaço de Banach ao ser munida da norma*

$$\|x\| = |x| = \max\{-x, x\}, \text{ se } x \in \mathbb{R}.$$

(ii) *O espaço \mathbb{R}^n com elementos denotados por $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um espaço de Banach ao ser munido da norma*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

(iii) *O espaço $C([a, b]; \mathbb{R})$ das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ munido da norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

é um espaço de Banach.

Proposição 1.1.3 *Seja X um espaço de Banach e seja $F \subset X$ um subconjunto qualquer. Então F é um subespaço de Banach se, e somente se, F é fechado.*

Prova: Suponhamos que $F \subset X$ seja um subespaço fechado e seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em F . Então, esta sequência também é de Cauchy em X ; logo, existe o limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ em X . Como F é fechado, resulta que $x \in F$. A recíproca é imediata. ■

Outros resultados de espaços de Banach serão apresentados na próxima seção, pois tais resultados dizem respeito aos conjuntos $\mathcal{L}(E, F)$ das aplicações lineares limitadas entre espaços vetoriais normados E e F .

1.2 Aplicações Lineares Limitadas

Veremos mais adiante que em espaços vetoriais normados, um critério simples para a continuidade de aplicações lineares está intimamente relacionado com a seguinte definição:

Definição 1.2.1 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ é dita limitada se existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in E$,*

$$\|Tx\| = M\|x\|.$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todas as transformações lineares limitadas de E em F .

Proposição 1.2.1 *Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) T é contínua;
- (ii) T é contínua na origem;
- (iii) T é limitada.

Prova: (i) \Rightarrow (ii) Óbvio. (ii) \Rightarrow (iii) Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de continuidade em espaços métricos, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ implica $\|Tx\| \leq 1$. Portanto, se $y \in E$ é um vetor qualquer não nulo, temos

$$\left\| T \left(\frac{\delta y}{\|y\|} \right) \right\| \leq 1.$$

Por linearidade, concluímos que

$$\|Ty\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\|,$$

que é válido para todo $y \in E$. (iii) \Rightarrow (i) Seja $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, para todo $x \in E$. Então

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq M\|x - y\|$$

e, conseqüentemente, T é uma aplicação lipschitziana e, em particular, contínua. ■

Observação 1.2.1 *Se E e F são espaços vetoriais normados de dimensão finita e $T : E \rightarrow F$ é linear, então T é contínua.*

Embora aplicações lineares em espaços vetoriais normados de dimensão finita sejam contínuas, o mesmo não vale para espaços vetoriais normados de dimensão infinita. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.2.1 *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita e F é um espaço vetorial normado tal que $\dim(F) \geq 1$. Seja β uma base para E , $\beta' = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \beta$ um subconjunto enumerável de vetores e $y \in F$ um vetor não nulo qualquer. Defina uma aplicação linear $T : E \rightarrow F$ da seguinte maneira:*

$$\begin{cases} Tx_n = n\|x_n\|y, & \text{para } n = 1, 2, \dots \\ Tx = 0, & \text{se } x \in \beta \setminus \beta' \end{cases}$$

Observe que T não é limitada, pois $\|Tx_n\| = n\|x_n\|\|y\|$, logo não existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|Tx_n\| \leq M\|x_n\|.$$

Concluimos, então, que podemos sempre construir uma aplicação linear $T : E \rightarrow F$ que não é limitada. Em particular, vemos que se E é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, sempre existem funcionais lineares que não são contínuos, pois podemos tomar $F = \mathbb{R}$.

Definição 1.2.2 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Definimos a norma de uma aplicação linear limitada $T : E \rightarrow F$ por

$$\|T\| = \inf\{M > 0; \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{ para todo } x \in E\}.$$

Proposição 1.2.2 Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear limitada. Então,

$$\|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

Demonstração: Seja

$$M = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Então, $\|Tx\| \leq M\|x\|$, para todo $x \in E$. Logo, $M \geq \|T\|$. Reciprocamente, como, por definição, $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ para todo $x \in E$, segue que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|,$$

para todo $x \in E \setminus \{0\}$, logo $\|T\| \geq M$. Isso prova a primeira identidade. Para provar que

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|Tx\|,$$

basta notar que

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$$

e, assim, a identidade segue diretamente. ■

Proposição 1.2.3 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então $\|T\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ é uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$.

Prova: Vamos mostrar somente a desigualdade triangular pois as outras condições são imediatas. Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$. Então,

$$\begin{aligned} \|(T + S)x\| &= \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|T\|\|x\| + \|S\|\|x\| \\ &= (\|T\| + \|S\|)\|x\|, \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, de onde segue o resultado. ■

Proposição 1.2.4 *Sejam E, F e G espaços vetoriais normados. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$, então $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ e*

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$$

Prova: Temos

$$\|(ST)x\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|,$$

para todo $x \in E$. ■

Proposição 1.2.5 *Se E é um espaço vetorial normado e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja [7] página 118. ■

Observação 1.2.2 *Além dos resultados vistos anteriormente, apresentamos também os seguintes resultados:*

- (i) *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é de Banach.*
- (ii) *Todo subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço vetorial normado é fechado.*
- (iii) *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então um subconjunto de E é compacto se, e somente se, ele for fechado e limitado.*
- (iv) *Se E é um espaço vetorial normado tal que a bola unitária $B_1(0) = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então E possui dimensão finita.*

Demonstração: Para uma prova destes fatos, veja, por exemplo, [2], [3] e [5]. ■

1.3 As Derivadas de Fréchet e de Gâteaux

Tendo em vista a generalização do teorema da função implícita para espaços Banach, necessitamos generalizar também os conceitos de derivada do cálculo de uma variável real.

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sabemos o que se entende por sua derivada (se existe) no ponto $a \in \mathbb{R}$. Esse número, denotado por $f'(a)$ (ou $Df(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$), é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (1.2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = \varepsilon(h), \quad (1.3)$$

onde $\varepsilon(h)$ é uma função tal que

$$\frac{\varepsilon(h)}{|h|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } |h| \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Como desejamos generalizar a noção de derivada para uma função definida num conjunto aberto de um espaço vetorial normado E tomando valores em outro espaço vetorial normado F , será conveniente considerar $f'(a)h$ como resultado de uma operação linear em h . Portanto, $f'(a)$ será considerado um funcional linear limitado em \mathbb{R} .

Sejam E e F espaços vetoriais normados (sobre \mathbb{R}).

Definição 1.3.1 *Sejam $U \subset E$ aberto e $f : U \rightarrow F$ dada. A função f é dita diferenciável em $a \in U$ se existe uma transformação linear limitada $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$f(a+h) - f(a) - Th = \varepsilon(h), \quad (1.5)$$

onde

$$\varepsilon(h) = o(\|h\|),$$

isto é

$$\frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \|h\| \rightarrow 0.$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$f(a+h) - f(a) - Th = \|h\|\eta(h), \quad (1.6)$$

onde $\|\eta(h)\| \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$.

Observação 1.3.1 *Claramente observamos que se f é diferenciável em $a \in U$, então f é contínua em $a \in U$. Com efeito, sendo f diferenciável, temos que (1.5) é satisfeito e, como $\varepsilon(h) = o(\|h\|)$, a continuidade de f em $a \in U$ segue da continuidade de T .*

Proposição 1.3.1 *Se f é diferenciável em $a \in U$, então a transformação linear limitada T definida anteriormente é única.*

Prova: Assuma que T_1 e T_2 satisfazem (1.6), ou seja,

$$f(a+h) - f(a) - T_1 h = \|h\| \varepsilon_1(h)$$

e

$$f(a+h) - f(a) - T_2 h = \|h\| \varepsilon_2(h),$$

onde $\|\varepsilon_1(h)\|$ e $\|\varepsilon_2(h)\|$ tendem a zero quando $\|h\| \rightarrow 0$. Seja $P = T_1 - T_2$. Então

$$Ph = \|h\|[\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)] := \|h\|\varepsilon(h).$$

Assim, $\|\varepsilon(h)\| \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. Fixando h e escolhendo uma sequência $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos:

$$Ph = \frac{1}{\lambda_n} P(\lambda_n h) = \frac{1}{\lambda_n} \|\lambda_n h\| \varepsilon(\lambda_n h) = \|h\| \varepsilon(\lambda_n h).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, vemos que $\|h\| \varepsilon(\lambda_n h) \rightarrow 0$. Como Ph não depende de n , temos que $Ph = 0$, para todo $h \in E$ e, portanto, $P \equiv 0$, mostrando que $T_1 = T_2$. ■

Provado isso, vemos que se uma função $f : U \rightarrow F$ é diferenciável num ponto $a \in U$, então é única a transformação linear T que fornece a boa aproximação para o acréscimo $f(a+h) - f(a)$ na vizinhança do ponto a . Ela é chamada a *derivada de Fréchet* de f no ponto a e indicada com a notação $f'(a)$.

Se a derivada de Fréchet $f'(a)$ existe para todo $a \in U$, diremos, simplesmente, que f é diferenciável em U .

Dada uma função $f : U \rightarrow F$ diferenciável em U , a função

$$\begin{aligned} f' : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\longmapsto f'(a) \end{aligned}$$

é chamada derivada de Fréchet de f .

Se $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ é contínua, dizemos que f é de classe C^1 .

Exemplo 1.3.1 *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para $b \in F$ defina*

$$f(x) = Tx + b.$$

Assim, $f(x + h) - f(x) - Th = \varepsilon(h)$, onde $\varepsilon(h) \equiv 0$. Portanto f é diferenciável em E e

$$f'(x)h = Th, \quad \text{para todo } h \in E.$$

Consequentemente $f'(x) = T$, para todo $x \in E$.

Exemplo 1.3.2 *Um espaço vetorial E munido de um produto interno*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

é chamado de espaço de Hilbert se E é completo com a norma proveniente do produto interno. Sejam E um espaço de Hilbert e $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e contínua em E . Defina $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2}g(x, x) - \langle b, x \rangle, \quad \text{para } x \in E,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em E e $b \in E$. Então,

$$f(x + h) - f(x) = g(x, h) + \frac{1}{2}g(h, h) - \langle b, h \rangle.$$

Como g é contínua, segue que

$$|g(h, h)| \leq M\|h\|^2.$$

Portanto, f é diferenciável em E e $f'(a)h = g(x, h) - \langle b, h \rangle$, para todos $x, h \in E$.

Assim como para funções em \mathbb{R}^n , podemos também definir a derivada direcional de $f : U \subset E \rightarrow F$ num ponto $a \in U$ na direção de um vetor $h \in E$. Tal derivada será chamada de *derivada de Gâteaux* de f em a na direção de $h \in E$.

Definição 1.3.2 *Sejam E e F espaços de Banach, $f : U \rightarrow F$ e $a \in U$. Diremos que f é Gâteaux diferenciável em $a \in U$ ao longo de $h \in E$, se existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = Th. \quad (1.7)$$

Se o limite existe para todo $h \in E$ diremos que f é Gâteaux diferenciável em $a \in U$ e denotaremos T por $f'_G(a)$. Se o limite existe para todo $a \in U$ e todo $h \in E$ diremos, simplesmente, que f é Gâteaux diferenciável em U .

Observação 1.3.2 Se f é Gâteaux diferenciável em $a \in U$, então a transformação linear limitada $f'_G(a)$ é única.

Definição 1.3.3 Seja $f : U \rightarrow F$ uma função Gâteaux diferenciável em U . A função

$$\begin{aligned} f'_G : U &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\longmapsto f'_G(a) \end{aligned}$$

é chamada derivada de Gâteaux de f .

Observação 1.3.3 Note que se f é Fréchet diferenciável em $a \in U$, então f é Gâteaux diferenciável em a e a derivada de Gâteaux de f será a derivada de Fréchet de f , ou seja, para todo $a \in U$, teremos $f'(a) = f'_G(a)$.

Veremos a seguir que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira sem a adição de algumas hipóteses.

Teorema 1.3.1 Suponha que $f : U \rightarrow F$ seja uma função Gâteaux diferenciável em U e que a derivada de Gâteaux seja contínua em a , então f é Fréchet diferenciável em a e $f'(a) = f'_G(a)$

Demonstração: Ver [1] página 14. ■

Se quisermos a diferenciabilidade de f em a como consequência da diferenciabilidade de f em a no sentido de Gâteaux, não podemos retirar a hipótese de continuidade da derivada de Gâteaux em a . Uma função pode ser Gâteaux diferenciável num ponto em qualquer direção, mas não ser Fréchet diferenciável nesse ponto, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.3 Seja $E = \mathbb{R}^2$ e $F = \mathbb{R}$. Defina

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{(x^4 + y^2)^2}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Nesse exemplo temos que f é Gâteaux diferenciável em $(0, 0)$, mas não é Fréchet diferenciável em $(0, 0)$. Com efeito, mostremos primeiramente que f é Gâteaux diferenciável em $(0, 0)$. Se $h = (h_1, h_2)$, com $h_2 \neq 0$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 h_1^4 h_2^2}{(t^2 h_1^4 + h_2^2)^2} = 0,$$

o que prova que f é Gâteaux diferenciável em $(0,0)$. Se f fosse Fréchet diferenciável em $(0,0)$ deveríamos ter $f'(0,0) = 0$. Porém, isto não é verdade, pois tomando $h = (h_1, h_1^2) \rightarrow (0,0)$, temos

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(h) - f(0)|}{\|h\|} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^8}{(h_1^4 + h_1^4)^2} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{4} \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = +\infty.$$

Portanto, f não é Fréchet diferenciável.

Como qualquer generalização que faça sentido, é de se esperar que a derivada de Fréchet seguisse as regras usuais de derivada de funções de uma variável real. Isto realmente ocorre: se f e g são duas funções diferenciáveis em a e se definirmos $f + g$ e, para $\lambda \in \mathbb{R}$, λf por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

então, podemos verificar facilmente que

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \text{e} \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

Outra regra importante é a derivação da composição de duas funções diferenciáveis (Regra da Cadeia).

Proposição 1.3.2 (Regra da Cadeia) *Sejam E, F e G espaços vetoriais normados, U aberto de E e V aberto de F . Sejam $f : U \rightarrow F$ e $g : V \rightarrow G$ tais que, para $a \in U$, tenhamos $f(a) = b \in V$. No conjunto aberto $U' = f^{-1}(V) \ni a$, defina*

$$h = g \circ f : U' \rightarrow G.$$

Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em b , então h é diferenciável em a e

$$h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a). \quad (1.8)$$

Demonstração: Temos que

$$(i) \quad f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a) \quad \text{e}$$

$$(ii) \quad g(y) - g(b) = g'(b)(y - b) + \eta(y - b),$$

onde $\varepsilon(x - a) = o(\|x - a\|)$ e $\eta(y - b) = o(\|y - b\|)$. Note que

$$\begin{aligned}
 h(x) - h(a) &= g(f(x)) - g(f(a)) \\
 &= g(f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a)) - g(f(a)) \\
 &= g'(f(a))(f'(a)(x - a) + \varepsilon(x - a)) + \eta(f(x) - f(a)) \\
 &= g'(f(a))f'(a)(x - a) + g'(f(a))\varepsilon(x - a) + \eta(f(x) - f(a)).
 \end{aligned}$$

Então, basta mostrarmos que

$$\frac{g'(f(a))\varepsilon(x - a) + \eta(f(x) - f(a))}{\|x - a\|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \|x - a\| \rightarrow 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 &\left\| g'(f(a)) \frac{\varepsilon(x - a)}{\|x - a\|} + \frac{\eta(f(x) - f(a))}{\|x - a\|} \right\| \\
 &\leq \|g'(f(a))\| \left\| \frac{\varepsilon(x - a)}{\|x - a\|} \right\| + \left\| \frac{\eta(f(x) - f(a))}{\|x - a\|} \right\|.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Portanto, como a primeira parcela do lado direito de (1.9) vai para zero quando $\|x - a\| \rightarrow 0$, basta mostrarmos que o segundo membro de (1.9) também tende a zero. Se $M > \|f'(a)\|$, então, para $\|x - a\|$ pequeno, temos

$$\|f(x) - f(a)\| \leq M\|x - a\|$$

e, portanto, $\|f(x) - f(a)\| \rightarrow 0$ quando $\|x - a\| \rightarrow 0$. Assim,

$$\frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|x - a\|} \leq \frac{1}{M} \frac{\|\eta(f(x) - f(a))\|}{\|f(x) - f(a)\|} \rightarrow 0$$

quando $\|x - a\| \rightarrow 0$. ■

Veremos, agora, algumas situações especiais onde E ou F são produtos de espaços vetoriais normados. Suponha que somente F seja um produto de espaços vetoriais normados, isto é, $F = F_1 \times \cdots \times F_m$. Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in F$. Além disso, para $1 \leq i \leq m$, defina as funções *projeção*

$$\begin{aligned}
 \pi_i : F &\longrightarrow F_i \\
 x &\longmapsto x_i
 \end{aligned}$$

e injeção

$$\begin{aligned}\iota_i &: F_i \longrightarrow F \\ x_i &\longmapsto (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

(exceto a i -ésima coordenada é nula). Consequentemente, se $x \in F$,

$$\begin{cases} \pi_i \circ \iota_i(x_i) = x_i \\ \sum_{i=1}^m \iota_i \circ \pi_i(x) = x \end{cases} \quad (1.10)$$

Proposição 1.3.3 *Sejam $U \subset E$ aberto e $f : U \rightarrow F$. Então f é diferenciável em $a \in U$ se, e somente se, para cada $1 \leq i \leq m$, $f_i = \pi_i \circ f : U \rightarrow F_i$ for diferenciável em $a \in U$. Nesse caso,*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^m \iota_i \circ f'_i(a). \quad (1.11)$$

Prova: Suponha que f é diferenciável. Assim, f_i também o é, já que f_i é a composição de f com a projeção π_i (que é diferenciável pois é uma transformação linear contínua; conferir Exemplo 1.3.1). Então, pela Proposição 1.3.2,

$$f'_i(a) = \pi_i \circ f'(a).$$

Suponha, agora, que f_i seja diferenciável para todo $1 \leq i \leq m$. Então, por (1.10), temos que

$$f = \sum_{i=1}^m \iota_i \circ f_i.$$

Portanto, como $\iota_i \in \mathcal{L}(F_i, F)$, f é diferenciável e, por conseguinte,

$$f'(a) = \sum_{i=1}^m \iota_i \circ f'_i(a),$$

como queríamos. ■

Consideremos agora o caso em que somente E é produto de espaços vetoriais normados, isto é, $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Sejam $U \subset E$ aberto e $f : U \rightarrow F$. Dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$, definimos $\lambda_i^a : E_i \rightarrow E$ por

$$\lambda_i^a(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Proposição 1.3.4 *Se f é diferenciável em $a \in U$, então, para cada i , $f \circ \lambda_i^a$ é diferenciável em a_i . Além disso,*

$$f'(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n (f \circ \lambda_i^a)'(a_i) h_i \quad (1.12)$$

para qualquer $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$.

Demonstração: Se ι_i é a injeção de E_i em E definida anteriormente, temos que

$$\lambda_i^a(x_i) = a + \iota_i(x_i - a_i).$$

Assim, como ι_i é linear, pelo Exemplo 1.3.1, observamos que

$$(\lambda_i^a)'(x_i) = \iota_i, \quad \text{para todo } x_i \in E_i.$$

Portanto, como por hipótese f é diferenciável, vemos que $f \circ \lambda_i^a$ também o é. Logo,

$$(f \circ \lambda_i^a)'(a_i) = f'(\lambda_i^a(a_i)) \circ (\lambda_i^a)'(a_i) = f'(a) \circ \iota_i. \quad (1.13)$$

Além disso, lembrando que

$$\sum_{i=1}^n \iota_i \circ \pi_i = I_E,$$

onde I_E é a identidade de E , obtemos

$$\sum_{i=1}^n (f'(a) \circ \iota_i) \circ \pi_i = f'(a).$$

Logo, usando (1.13), obtemos

$$\sum_{i=1}^n (f \circ \lambda_i^a)'(a_i) \circ \pi_i = f'(a).$$

Assim, para todo $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$,

$$f'(a)h = \sum_{i=1}^n (f \circ \lambda_i^a)'(a_i)h_i,$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição 1.3.4 Chamaremos $(f \circ \lambda_i^a)'(a_i)$ de *i-ésima derivada parcial de f em a* , denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$.

Em outras palavras, a noção de derivada parcial pode ser vista da seguinte maneira: Sejam $E = E_1 \times \dots \times E_n$ e $U_1 \subset E_1, \dots, U_n \subset E_n$ subconjuntos abertos. Consideremos a função $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow F$. Se $a = (a_1, \dots, a_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$ e se mantivermos $a_1 \in U_1, \dots, a_{i-1} \in U_{i-1}, a_{i+1} \in U_{i+1}, \dots, a_n \in U_n$ (exceto $a_i \in U_i$) fixos, então, como função da *i-ésima* variável, definimos a derivada de Fréchet conforme o fizemos anteriormente. Se existir, esta derivada será denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ e, nesse caso, temos a aplicação $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow \mathcal{L}(E_i, F)$, denominada a derivada parcial em relação a *i-ésima* variável.

Exemplo 1.3.4 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $a \in U$. Então $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e, portanto, $f'(a)$ pode ser representada por uma matriz $m \times n$. Além disso, se $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, então, por (1.11) e (1.12), deduzimos que $f'(a)$ é dada pela usual matriz jacobiana, ou seja,*

$$f'(a) = Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Observação 1.3.4 *Como podemos observar no Exemplo 1.3.3, a recíproca da Proposição 1.3.4 é falsa; todas as derivadas parciais de f num ponto a podem existir sem que f seja diferenciável em a . Entretanto, provaremos mais adiante (veja Proposição 1.3.5) a diferenciabilidade de f como consequência da existência das derivadas parciais de f juntamente com algumas hipóteses adicionais.*

Outro resultado importante do cálculo diferencial de funções de uma variável que pode ser generalizado que iremos discutir e que será de extrema importância no entendimento da demonstração do Teorema da Função Implícita é a Desigualdade do Valor Médio. Uma das várias formas desse teorema é a versão para funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} (e nesse caso, temos a igualdade em vez da desigualdade):

Teorema 1.3.2 (Teorema do Valor Médio) *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em um intervalo contendo $[a, a + h]$, então existe $\theta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h. \quad (1.14)$$

É sabido que (1.14) não é verdade em situações mais gerais, como por exemplo, para espaços vetoriais normados E e F arbitrários. De fato, seja $E = \mathbb{R}$ e $F = \mathbb{R}^2$ e defina

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Pela Proposição 1.3.3, temos que

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Concluimos, então, que não existe $t \in (0, 2\pi)$ tal que $f'(t) = (0, 0)$. Tomando $[a, a + h] = [0, 2\pi]$, então, se o Teorema 1.3.2 fosse verdade, existiria $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$(0, 0) = f(2\pi) - f(0) = f'(2\pi\theta)2\pi,$$

ou seja,

$$f'(2\pi\theta) = (0, 0),$$

configurando, assim, uma contradição, pois sendo $\theta \in (0, 1)$, temos que $2\pi\theta \in (0, 2\pi)$. ■

Entretanto, existem outras versões desse resultado. De fato, de (1.14), deduzimos que se f é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} a qual é diferenciável num intervalo contendo $[a, a + h]$, então

$$|f(a + h) - f(a)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} |f'(a + \theta h)| |h|. \quad (1.15)$$

Essa versão da Desigualdade do Valor Médio pode ser generalizada. Antes de tal generalização considere a seguinte definição:

Definição 1.3.5 *Seja E um espaço vetorial normado e sejam $a, b \in E$. Então chamaremos de intervalo fechado e intervalo aberto os conjuntos*

$$[a, b] := \{x \in E; x = (1 - t)a + tb, 0 \leq t \leq 1\}$$

e

$$(a, b) := \{x \in E; x = (1 - t)a + tb, 0 < t < 1\},$$

respectivamente.

Teorema 1.3.3 (Desigualdade do Valor Médio) *Sejam E e F espaços vetoriais normados e $U \subset E$ aberto. Seja $f : U \rightarrow F$ diferenciável em U e considere $[a, b] \in U$. Então*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\| \quad (1.16)$$

Demonstração: Provemos o resultado primeiramente para $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$, onde F é um espaço vetorial normado. Para isso, será suficiente mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$\|f(x) - f(a)\| \leq (k + \varepsilon)(x - a) + \varepsilon, \quad (1.17)$$

onde $x \in [a, b] \subset U$ e $k = \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|$; a relação (1.16) segue quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $x = b$. Suponha, por contradição, que ocorre o contrário e defina

$$V := \{x \in [a, b]; \|f(x) - f(a)\| > (k + \varepsilon)(x - a) + \varepsilon\}.$$

Note que V é um subconjunto aberto de $[a, b]$. Assim, se c é o ínfimo de V , então $c \notin V$. Por continuidade, (1.17) é verdade para todo x próximo de a e, portanto, $c \neq a$. Ademais, $c \neq b$, pois, caso contrário, teríamos $V = \{b\}$ o que não é possível. Logo, $a < c < b$ e $\|f'(c)\| \leq k$. Então, para algum $\eta > 0$, temos

$$k \geq \frac{\|f(x) - f(c)\|}{x - c} - \varepsilon,$$

para $c \leq x \leq c + \eta$, ou seja,

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (k + \varepsilon)(x - c).$$

Entretanto, desde que $c \notin V$, temos que

$$\|f(c) - f(a)\|(k + \varepsilon)(c - a) + \varepsilon$$

e, combinando as duas desigualdade acima, concluimos que, para $c \leq x \leq c + \eta$, $x \notin V$, o que contradiz a definição de c . Isso mostra que $V = \emptyset$ e, conseqüentemente, prova (1.16).

Agora, defina, para $0 \leq t \leq 1$,

$$h(t) = f((1 - t)a + tb).$$

Então, $h : [0, 1] \rightarrow F$ e, pela Proposição 1.3.3, h é diferenciável e

$$h'(t) = f'((1 - t)a + tb)(b - a).$$

Daí, concluimos que

$$\|h'(t)\| \leq \|f'((1 - t)a + tb)\| \|b - a\|$$

e o resultado segue aplicando a primeira parte dessa demonstração na função h . ■

Corolário 1.3.1 *Se $U \subset E$ é um aberto convexo, $f : U \rightarrow F$ é diferenciável em U e*

$$\|f'(x)\| \leq M, \quad \text{para todo } x \in U,$$

então, para todo $x, y \in U$, temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad (1.18)$$

isto é f é uma função lipschitziana com constante de Lipschitz igual a M

Corolário 1.3.2 *Seja $f : U \subset E \rightarrow F$ diferenciável em U . Assuma que U é conexo e que $f'(x) = 0$ para todo $x \in U$. Então f é uma função constante.*

Prova: Sejam $x_0 \in U$ e $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ a bola aberta de centro x_0 e raio $\varepsilon > 0$. Assim, $B_\varepsilon(x_0)$ é um conjunto convexo e, pelo Corolário 1.3.1, temos que

$$f(x) = f(x_0), \quad \text{para todo } x \in B_\varepsilon(x_0),$$

já que $\|f'(x)\| = 0$, para todo $x \in U$. Portanto, f é localmente constante. Consequentemente, para qualquer $b \in F$, $f^{-1}(b)$ é aberto, pois $f^{-1}(b) = B_\varepsilon(x_0)$ para algum $x_0 \in U$ e alguma $\varepsilon > 0$ e fechado, pois sendo F um espaço vetorial normado, temos que F é Hausdorff. Portanto, $\{b\}$ é um conjunto fechado e, dessa forma, $f^{-1}(b)$ é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua. Portanto, pela conexidade de U , temos que $f^{-1}(b) = \emptyset$ ou U . Se escolhermos $b = f(x_0)$ para alguma $x_0 \in U$, temos que $f(x) = b$, para todo $x \in U$. ■

Consideremos novamente $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ e $U \subset E$ aberto. Já vimos que se $f : U \rightarrow F$ é diferenciável em $a \in U$, então existem todas as derivadas parciais de f em a . Falamos também que a recíproca dessa afirmação é falsa; todas as derivadas parciais de f em a podem existir sem que f seja sequer contínua em a .

O resultado a seguir garante a diferenciabilidade de f num ponto a como consequência imediata da existência das derivadas parciais de f juntamente com algumas hipóteses adicionais.

Proposição 1.3.5 *Sejam $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ o produto de espaços vetoriais normados e F um espaço vetorial normado. Considere $U \subset E$ aberto e $f : U \rightarrow F$ uma função dada. Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ para todo ponto $x \in U$ e se as funções $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são contínuas em $a \in U$ para todo $1 \leq i \leq n$, então f é diferenciável em a .*

Demonstração: Nosso objetivo é mostrar que

$$f'(a)h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i. \quad (1.19)$$

Considere

$$\begin{aligned}
 & f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\
 &= f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) \\
 & \quad + f(a_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) \\
 & \quad + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n).
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Definindo

$$g(\xi_1) = f(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(\xi_1 - a_1),$$

então

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) = g(x_1) - g(a_1).$$

Além disso, g é diferenciável e

$$g'(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n).$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ é contínua, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|g'(\xi_1)\| < \varepsilon$ quando $\|x_i - a_i\| < \delta$, para todo $1 \leq i \leq n$. Assim, pela Desigualdade do Valor Médio, temos que

$$\|g(x_1) - g(a_1)\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Observe que temos estimativas similares para os termos de cada coluna em (1.20). Concluimos, então, que

$$\|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)\| = o(\|x - a\|).$$

Portanto, f é diferenciável em a e a derivada de f em a é dada por (1.19). ■

Capítulo 2

O Teorema da Função Implícita

O Teorema da Função Implícita é, junto com o Teorema da Função Inversa, um dos mais importantes e um dos paradigmas mais antigos na matemática moderna. Já foi constatado uma noção da idéia do Teorema da Função Implícita nos escritos de Isaac Newton (1642-1727). Nos trabalhos de Gottfried Leibniz (1646-1716) também é possível observar passagens onde utilizou-se diferenciações implícitas.

Enquanto Joseph Louis Lagrange (1736-1813) descobriu um teorema que é essencialmente uma versão do Teorema da Função Inversa, foi Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) que se aproximou do Teorema da Função Implícita com rigor matemático e é ele que geralmente é reconhecido como o descobridor do teorema.

Hoje entendemos os Teoremas das Funções Implícita e Inversa como ferramentas para resolvermos diversos tipos de problemas. Estes problemas podem ser formulados em muitos contextos diferentes, já que estes teoremas são válidos, por exemplo, em espaços euclidianos e espaços de Banach.

Suponha $A \times B$ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e seja $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha ainda que $(a, b) \in A \times B$ é uma raiz de f . Assim, dada a relação

$$f(x, y) = 0, \tag{2.1}$$

para cada valor $x \in U$, onde $U \subset A$ é uma vizinhança de a , pode ocorrer uma das três possibilidades a seguir:

- (i) não existir y que satisfaça a equação;
- (ii) existir um único y que satisfaça a equação; e

(iii) existir dois ou mais valores de y para os quais a equação é satisfeita.

Com isso em mente, daremos a seguinte definição:

Definição 2.0.6 *Se U é uma vizinhança de a tal que para cada $x \in U$ existe exatamente um y satisfazendo a equação (2.1), então dizemos que $f(x, y) = 0$ define y como uma função de x implicitamente sobre U .*

O Teorema da Função Implícita é um resultado que determina condições sob as quais uma relação como $f(x, y) = 0$ define y como função de x ou x como função de y . A solução é local no sentido que a vizinhança U pode estar contida no domínio da função f .

A forma mais simples de um Teorema da Função Implícita afirma que se f é diferenciável e se (a, b) é um ponto em que $\frac{\partial f}{\partial y}$ não se anula, então é possível expressar y como função de x em uma região contendo este ponto. Enunciamos esta versão a seguir.

Teorema 2.0.4 (Teorema da Função Implícita) *Suponha que f é uma função de classe C^1 sobre um aberto $A \times B$ do plano \mathbb{R}^2 contendo o ponto (a, b) . Suponha ainda que*

$$f(a, b) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Então, existem intervalos $U = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < h\} \subset A$ e $V = \{y \in \mathbb{R}; |y - b| < k\} \subset B$ e uma única função $\phi : U \rightarrow V$ de classe C^1 satisfazendo

$$f(x, \phi(x)) = 0, \quad \text{para todo } x \in U.$$

Além disso,

$$\phi'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$

2.1 O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach

Agora, como já conhecemos e estamos mais familiarizados com o Teorema da Função Implícita em sua forma mais simples, iremos trabalhar com o intuito de provar tal teorema em espaços de Banach.

Para tal finalidade vamos usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Seja M um espaço métrico. Considere a seguinte definição:

Definição 2.1.1 *Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.*

Definição 2.1.2 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se uma contração quando existe uma constante C , com $0 \leq C < 1$, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y), \quad \text{para quaisquer } x, y \in M.$$

Teorema 2.1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo.*

Prova: Seja $x_0 \in M$ e defina

$$x_1 = f(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

A sequência (x_n) assim definida é uma sequência de Cauchy em M , pois

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq Cd(x_0, x_1)$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2) \leq C^2d(x_0, x_1)$$

$$\vdots$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq C^n d(x_0, x_1),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe também que, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq C^n d(x_0, x_1) + C^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + C^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= C^n (1 + C + \dots + C^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq C^n \left(\frac{1}{1-C} \right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy, e como M é um espaço métrico completo, (x_n) converge para algum ponto $a \in M$.

Mostremos, agora, que $\lim x_n = a$ é o único ponto fixo de f . Como f é contínua,

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Assim, $a \in M$ é ponto fixo de f . Vamos supor que f admite um outro ponto fixo $b \in M$. Como f é contração, vale

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq Cd(a, b), \quad \text{com } 0 \leq C < 1.$$

Logo, $(1 - C)d(a, b) \leq 0$ e, sabendo que $1 - C > 0$, segue que $d(a, b) = 0$. Portanto, $a = b$, o que mostra a unicidade de pontos fixos para contrações. ■

A seguir, enunciamos e demonstramos o Teorema da Função Implícita em sua forma mais geral.

Teorema 2.1.2 (Teorema da Função Implícita) *Sejam E , F e G espaços vetoriais normados e assumamos F um espaço de Banach. Sejam $\Omega \subset E \times F$ aberto e $f : \Omega \rightarrow G$ uma função tal que*

(i) *f é contínua;*

(ii) *para todo $(x, y) \in \Omega$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe e é contínua em Ω ;*

(iii) *$f(a, b) = 0$ e $T = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é invertível e tem inversa contínua.*

Então, existem vizinhanças U de a e V de b e uma função contínua $\phi : U \rightarrow V$ tal que $\phi(a) = b$ e as únicas soluções em $U \times V$ da equação

$$f(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

são da forma $(x, \phi(x))$. Além disso, se f é diferenciável em (a, b) , então ϕ é diferenciável em a e

$$\phi'(a) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right]^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right]. \tag{2.3}$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em 4 etapas.

1ª Etapa: Defina $g : \Omega \rightarrow F$ por

$$g(x, y) = y - T^{-1}f(x, y). \tag{2.4}$$

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = I - T^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

e, por (ii), $\frac{\partial g}{\partial y}$ é contínua em Ω . Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = I - T^{-1}T = I - I = 0, \quad (2.5)$$

$$g(a, b) = b - T^{-1}0 = b.$$

Pela continuidade de $\frac{\partial g}{\partial y}$ (em (a, b)), existem vizinhanças U_1 de a e V de b tais que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \right\| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } (x, y) \in U_1 \times V,$$

ou seja,

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right\| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para todo } (x, y) \in U_1 \times V. \quad (2.6)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $V = B_r[b]$.

Agora, por continuidade de g , deduzimos que existe uma vizinhança $U \subset U_1$ tal que $a \in U$ e

$$\|g(x, b) - g(a, b)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \text{para todo } x \in U.$$

Portanto,

$$\|g(x, b) - b\| \leq \frac{r}{2}, \quad \text{para todo } x \in U. \quad (2.7)$$

2ª Etapa: Fixe $x_0 \in U$ e defina $g_{x_0} : V \rightarrow F$ por

$$g_{x_0}(y) = g(x_0, y).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|g_{x_0}(y) - b\| &= \|g(x_0, y) - b\| \\ &= \|g(x_0, y) - g(x_0, b) + g(x_0, b) - b\| \\ &\leq \|g(x_0, y) - g(x_0, b)\| + \|g(x_0, b) - b\| \\ &\leq \sup_{y \in V} \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y) \right\| \|y - b\| + \|g(x_0, b) - b\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|y - b\| + \frac{r}{2} \\ &\leq r, \end{aligned}$$

onde utilizamos a Desigualdade do Valor Médio, (2.6) e (2.7). Portanto, $g_{x_0}(y) \in V$ e, consequentemente, g_{x_0} é uma função de V em V , ou seja,

$$g_{x_0} : V \longrightarrow V.$$

Novamente utilizando (2.6) e a Desigualdade do Valor Médio, concluimos que g_{x_0} é uma contração com constante de Lipschitz igual a $\frac{1}{2}$. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único ponto fixo $y_0 = g_{x_0}(y_0)$ em V .

Observe que para cada $x_0 \in U$, encontramos um único ponto fixo $y_0 \in V$ de g_{x_0} . Então, fica bem definida a função

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

onde $\phi(x)$ é o ponto fixo em V de g_x .

Note que

$$y_0 = \phi(x_0) = g_{x_0}(y_0) = g(x_0, y_0) = y_0 - T^{-1}f(x_0, y_0).$$

Portanto, $T^{-1}f(x_0, y_0) = 0$, ou seja, $f(x_0, y_0) = f(x_0, \phi(x_0)) = 0$. Como $x_0 \in U$ foi escolhido arbitrariamente, as únicas soluções de (2.2) em $U \times V$ são dadas por $(x, \phi(x))$. Como $(a, b) \in U \times V$ é solução de (2.2), então $\phi(a) = b$.

3ª Etapa (Continuidade de ϕ): Seja $\tilde{x} \in U$. Então

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(\tilde{x})\| &= \|g(x, \phi(x)) - g(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))\| \\ &\leq \|g(x, \phi(x)) - g(x, \phi(\tilde{x}))\| + \|g(x, \phi(\tilde{x})) - g(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\phi(x) - \phi(\tilde{x})\| + \|g(x, \phi(\tilde{x})) - g(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))\|, \end{aligned}$$

onde usamos a Desigualdade do Valor Médio e (2.6). Portanto, obtemos

$$\|\phi(x) - \phi(\tilde{x})\| \leq 2\|g(x, \phi(\tilde{x})) - g(\tilde{x}, \phi(\tilde{x}))\|.$$

Logo, pela continuidade de g , temos que ϕ também é contínua.

4ª Etapa (Diferenciabilidade de ϕ): Assuma que f é diferenciável em (a, b) . Escolha

$h \in E$ suficientemente pequeno tal que $a + h \in U$ e seja $k := \phi(a + h) - \phi(a)$. Temos que

$$\begin{aligned} 0 &= f(a + h, \phi(a + h)) - f(a, \phi(a)) \\ &= f(a + h, b + k) - f(a, b) \\ &= f'(a, b)(h, k) + (\|h\| + \|k\|)\varepsilon(h, k), \end{aligned}$$

onde $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$ e $\|k\| \rightarrow 0$. Portanto, usando a Proposição 1.3.4 do Capítulo 1, obtemos

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k + (\|h\| + \|k\|)\varepsilon(h, k),$$

onde $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$ e $\|k\| \rightarrow 0$. Assim, aplicando $T^{-1} = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right]^{-1}$, concluímos que

$$k = \phi(a + h) - \phi(a) = -T^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] h - (\|h\| + \|k\|)T^{-1}\varepsilon(h, k). \quad (2.8)$$

Portanto, para mostrar (2.3), basta mostrar que

$$(\|h\| + \|k\|)\|T^{-1}\varepsilon(h, k)\| = \|h\|\eta(h), \quad (2.9)$$

onde $\eta(h) \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. Mas, por (2.8),

$$\|k\| \leq \alpha\|h\| + \beta(\|h\| + \|k\|)\|\varepsilon(h, k)\|, \quad (2.10)$$

onde

$$\alpha = \left\| T^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right\| \quad \text{e} \quad \beta = \|T^{-1}\|.$$

Além disso, como ϕ é contínua, $\|k\| \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. Portanto, $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$. Segue-se que existe $r_0 > 0$ tal que se $\|h\| \leq r_0$, então $\|T^{-1}\|\|\varepsilon(h, k)\| \leq \frac{1}{2}$ e, dessa forma, por (2.10), obtemos

$$\|k\| \leq \alpha\|h\| + \frac{1}{2}(\|h\| + \|k\|)$$

Consequentemente,

$$\|k\| \leq (2\alpha + 1)\|h\|, \quad (2.11)$$

o que prova (2.9), pois observamos que

$$\eta(h) = \|T^{-1}\varepsilon(h, k)\| + \frac{\|k\|\|T^{-1}\varepsilon(h, k)\|}{\|h\|}$$

e, finalmente, usando (2.11), segue-se que

$$\eta(h) \leq \|T^{-1}\varepsilon(h, k)\| + (2\alpha + 1)\|T^{-1}\varepsilon(h, k)\|.$$

Logo, como $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$, temos que $\eta(h) \rightarrow 0$ quando $\|h\| \rightarrow 0$, como queríamos demonstrar. ■

O uso do Teorema do Ponto Fixo de Banach na prova do Teorema da Função Implícita foi primeiramente dada por Goursat em "Sur la théorie des fonctions implicites, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **31** (1903), 184-192". Edouard Goursat (1858-1936), por sua vez, inspirou-se em Charles Émile Picard (1856-1941) na demonstração da existência de soluções para equações diferenciais ordinárias.

Capítulo 3

Aplicações do Teorema da Função Implícita

Existem diversas aplicações do Teorema da Função Implícita. Por exemplo, em Álgebra, Geometria Diferencial, Topologia Diferencial, Análise Funcional, teoria do ponto fixo, equações diferenciais, entre muitos outros ramos da matemática.

3.1 Uma Aplicação em Sistemas Não-Lineares

A seguinte proposição é um exemplo de uma aplicação simples e direta do Teorema da Função Implícita.

Proposição 3.1.1 *Considere o sistema nas variáveis u, v, w, h e k*

$$\begin{cases} uk + vh + w + h^2 = 0 \\ uvw + h + k + 1 = 0 \end{cases}$$

Então,

(i) *na vizinhança de $(2, 1, 0, -1, 0)$, podemos resolver este sistema com h e k em função de (u, v, w) e*

(ii) *se $(h, k) = (\phi_1(u, v, w), \phi_2(u, v, w)) = \phi(u, v, w)$ é a solução obtida em (i), então*

$$\phi'(2, 1, 0) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Prova: (i) Defina $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\begin{aligned} f(u, v, w, h, k) &= (f_1(u, v, w, h, k), f_2(u, v, w, h, k)) \\ &= (uk + vh + w + h^2, uvw + h + k + 1). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Verifiquemos que podemos aplicar o Teorema 2.1.2 em tal f definida acima:

- (1) Consideremos $E \times F = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^5$ e $G = \mathbb{R}^2$. Assim, E, F e G são espaços de Banach.
- (2) f é contínua.
- (3) Se considerarmos $x = (u, v, w)$ e $y = (h, k)$, temos, pelo Exemplo 1.3.4, que, para todo (x, y) ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial k}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial h}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial k}(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v + 2h & u \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, portanto, existe e é contínua.

- (4) Considere $(a, b) = (2, 1, 0, -1, 0)$. Assim, $f(a, b) = 0$ e $T = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é invertível e tem inversa contínua, pois

$$\det T = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial k}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial h}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial k}(a, b) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Assim, concluimos que podemos aplicar o Teorema da Função Implícita em $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em (3.1).

Portanto, aplicando o teorema referido, existe $B_\delta(2, 1, 0)$ tal que, para cada $(u, v, w) \in B_\delta(2, 1, 0)$, existe um único $(h, k) = (\phi_1(u, v, w), \phi_2(u, v, w)) = \phi(u, v, w) \in B_\varepsilon(-1, 0)$ tal que $f(u, v, w, h, k) = f(u, v, w, \phi(u, v, w)) = (0, 0)$.

(ii) Novamente pelo Teorema da Função Implícita e pelo Exemplo 1.3.4 note que

$$\phi'(a) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial k}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial h}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial k}(a, b) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(a, b) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \phi'(2, 1, 0) &= - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

3.2 O Teorema da Função Inversa

O Teorema da Função Inversa é um importante resultado da Análise e vale se, e somente se, o Teorema da Função Implícita vale. O Teorema da Função Inversa admite diversas versões, as quais estabelecem basicamente a existência local de um função inversa para uma aplicação f de classe C^k .

Teorema 3.2.1 (Teorema da Função Inversa) *Sejam E e F espaços de Banach e $A \subset E$ aberto. Seja $f : A \rightarrow F$ uma função de classe C^k , $k \geq 1$. Se $a \in A$ é tal que $f(a) = b$ e $f'(a) : E \rightarrow F$ um isomorfismo, então existem abertos U de a e V de b e uma única função $g : V \rightarrow U$ de classe C^k tais que*

$$\begin{cases} a = g(b) \\ f(g(y)) = y, \end{cases}$$

para todo $y \in V$. Além disso, a função $g : V \rightarrow U$ é diferenciável em $y = f(x) \in V$ e $g'(y) = (f'(x))^{-1}$.

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned}\psi &: \Omega \times F \longrightarrow F \\ (x, y) &\longmapsto f(x) - y\end{aligned}$$

Note que

- (i) ψ é contínua, pois f é contínua;
- (ii) para todo $(x, y) \in \Omega \times F$, $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = f'(x)$ existe e é contínua em $\Omega \times F$;
- (iii) $\psi(a, b) = 0$ e $T = \frac{\partial \psi}{\partial x}(a, b) = f'(a)$ é invertível e tem inversa contínua.

Logo, aplicando o Teorema da Função Implícita em ψ , existem abertos $U \ni a$ e $V \ni b$ e uma função $g : V \rightarrow U$ de classe C^k tais que $\psi(b) = a$ e as únicas soluções em $U \times V$ da equação

$$\psi(x, y) = 0$$

são da forma $(g(y), y)$, ou seja, $\psi(g(y), y) = 0$, para todo $y \in V$. Daí, concluímos que

$$f(g(y)) - y = 0$$

e, consequentemente

$$f(g(y)) = y,$$

para todo $y \in V$. Além disso, para $x \in U$, g é diferenciável em $f(x) = y \in V$ e

$$\begin{aligned}g'(y) &= - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \right]^{-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \right] \\ &= (f'(x))^{-1},\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema. ■

3.3 Equações Diferenciais Ordinárias

O estudo de equações diferenciais ordinárias começou quando viu-se a necessidade de descrever matematicamente uma solução para uma ampla classe de problemas em diversos ramos da matemática. Por exemplo, no estudo do movimento de partículas ou

no crescimento de populações, observou-se que as soluções desses problemas eram funções diferenciáveis que verificavam, cada uma delas, um sistema composto de uma equação diferencial ordinária sujeita a uma determinada condição inicial. Esse sistema (equação diferencial ordinária e condição inicial) é comumente chamado de problema de Cauchy. Mais especificamente, sejam E um espaço de Banach e $\Omega \subset E$ um subconjunto aberto; sejam $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e $f \in C(I \times \Omega; X) = \{f : I \times \Omega \rightarrow X; f \text{ é contínua}\}$ uma função que pode ser interpretada como um campo vetorial dependente do tempo e definido em Ω . O problema de Cauchy é

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt}(x, t) = f(t, \vartheta(t, x)) \\ \vartheta(x, t_0) = x_0, \end{cases}$$

onde $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ e f é uma função contínua.

Há uma forte conexão entre o Teorema da Função Implícita e a teoria das equações diferenciais. Isso é verdade até mesmo do ponto de vista histórico: para demonstrar o Teorema da Função Implícita, Goursat inspirou-se na prova da existência e unicidade de soluções para problemas de equações diferenciais ordinárias dada por Picard.

Para que certos problemas de equações diferenciais possam ter algum significado importante para as aplicações, é fundamental estabelecer de que forma uma solução depende das condições iniciais. O objetivo principal dessa aplicação será estabelecer um resultado dessa natureza, cuja demonstração seja uma consequência do Teorema da Função Implícita. Um desses resultados que é de vasta utilidade e que pode ser provado como aplicação do Teorema da Função Implícita é o "Teorema de Existência e Dependência Contínua da Solução do Problema da Cauchy". Nos baseamos no trabalho de Robbin em [8] para apresentar tal resultado.

Teorema 3.3.1 *Sejam E um espaço de Banach e $\Omega \subset E$ um subconjunto aberto; seja $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow E$ uma aplicação tal que $f \in C^r(\mathbb{R} \times \Omega; E)$, $r \geq 1$. Então para cada elemento $x_0 \in \Omega$ existem uma vizinhança aberta V de x_0 , um intervalo aberto $(\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ e uma aplicação $\vartheta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \times V \rightarrow \Omega$ tais que valem as seguintes afirmativas:*

$$(i) \quad \vartheta \in C^r((-\varepsilon, +\varepsilon) \times V; \Omega);$$

$$(ii) \quad \vartheta(0, x) = x, \text{ para todo } x \in V; \text{ e}$$

$$(iii) \quad \frac{d\vartheta}{dt}(t, x) = f(t, \vartheta(t, x)) \text{ para } (t, x) \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \times V.$$

Prova: Podemos supor, sem perda de generalidade, que o ponto x_0 é a origem do espaço de Banach E e que a vizinhança Ω de x_0 é uma bola de raio r centrada nesse ponto, isto é, $\Omega = B_r(x_0)$. Seja $\Omega_0 = B_{r/2}(x_0)$ a bola centrada em x_0 e cujo raio é a metade do raio de Ω . Seja $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Dado $p \in \mathbb{N}$, seja $C^p(I; E)$ o espaço de Banach das aplicações de classe C^p da forma $\gamma : I \rightarrow E$ com a topologia de C^p e seja $C_0^p(I; E)$ o subespaço fechado de $C^p(I; E)$ formado pelas aplicações $\gamma \in C^p(I; E)$ tais que $\gamma(0) = 0$; finalmente, seja $C_0^p(I; \Omega_0)$ o conjunto das aplicações $\gamma \in C_0^p(I; E)$ tais que $\gamma(I) \subseteq \Omega_0$. Note que $C_0^p(I; \Omega_0)$ é um subconjunto aberto no espaço de Banach $C_0^p(I; E)$.

Seja

$$F(a, x, \gamma)(t) \equiv \gamma(t) - af(at, x + \gamma(t)),$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega_0$ e $\gamma \in C_0^1(I; \Omega_0)$ para $t \in I$. Assim, temos que $F \in C^1$ entre os espaços de Banach envolvidos. Note também que a aplicação $\gamma \mapsto \gamma'$ é uma aplicação linear contínua. A derivada parcial em relação a γ no ponto $a = 0$, $x = x_0$ e $\gamma = 0$ avaliada no vetor tangente $\delta \in C_0^1(I; E)$ é dada por

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma}(0, x_0, 0) = \frac{d}{dt}\delta(t).$$

Observe que esta aplicação é um isomorfismo linear. Como $F(0, x_0, 0) = 0$, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita para espaços de Banach e, dessa forma, obteremos uma vizinhança $(-2\varepsilon, +2\varepsilon) \times V$ de $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega_0$ e uma aplicação $H : (-2\varepsilon, +2\varepsilon) \times V \rightarrow C_0^1(I; \Omega_0)$ de classe C^1 tal que

$$F(a, x, H(a, x)) = 0$$

para $(a, x) \in (-2\varepsilon, +2\varepsilon) \times V$. Podemos definir $\vartheta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \times V \rightarrow \Omega$ pela expressão

$$\vartheta(t, x) = H(\varepsilon, x)(t/\varepsilon) + x.$$

A aplicação ϑ é de classe C^1 . Além disso, $\vartheta(0, x) = x$, pois $H(\varepsilon, x) \in C_0^1(I; \Omega_0)$. Finalmente, como

$$\frac{d}{dt}\vartheta(t, x) - f(t, \vartheta(t, x)) = (1/\varepsilon)F(\varepsilon, x, H(\varepsilon, x))(t/\varepsilon) = 0,$$

resulta que ϑ é a curva solução. Isto demonstra o teorema no caso em que $r = 1$.

Para demonstrar o caso geral, iremos usar um argumento de indução padrão: consideremos o espaço de Banach $B = C^{r-1}(\overline{\Omega}; E)$ e seja a aplicação $\omega_f : B \rightarrow B$ definida por $\omega_f(\eta) = f \circ \eta$. Esta aplicação é de classe C^1 e, sendo ω_f uma aplicação sobre B , existe uma única solução η_t da equação diferencial em (iii) que é de classe C_1 tal que $\eta_0 =$ identidade pelo que já foi demonstrado. Essa curva é de classe C^{r-1} pois pertence a B . Como $r \geq 2$, resulta que η é pelo menos de classe C^1 e, assim, vemos que $\eta'_t = u_t$ verifica a equação diferencial do item (iii), isto é

$$\frac{d}{dt}u_t = F'(\eta_t)u_t.$$

Novamente, pelo que já foi demonstrado, vemos que $u_t \in C^{r-1}((-\varepsilon, +\varepsilon) \times V; \Omega)$, ou seja, $\eta_t \in C^r((-\varepsilon, +\varepsilon) \times V; \Omega)$ e isto, finalmente, conclui a demonstração do teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] AMBROSETTI, A.; PRODI, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [2] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula: Análise Funcional*, Instituto de Ciências Exatas - UFMG, 2009.
- [3] LIMA, E. L., *Curso de Análise, Volume 2*, 4ª edição, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1981.
- [4] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*, 3ª edição, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.
- [5] KESAVAN, S., *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Hindustan Book Agency, 2004.
- [6] KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R., *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*, Birkhäuser Boston, 2th printing, 2003.
- [7] KREYZIG, E., *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [8] ROBBIN, J. W., *On The Existence Theorem For Differential Equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 221-223.